ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1998

MATHÉMATIQUES : ÉPREUVE A

COMMUNE AUX DEUX FILIÈRES

DURÉE : 3 heures 00.

N.B. : Ce sujet comporte 3 pages de texte.
Les calculatrices sont interdites.

La notation $f^{(n)}$ désigne dans tout le problème la dérivée d'ordre n de la fonction f, avec la convention usuelle $f^{(0)} = f$.

On utilisera la notation abrégée cot pour la fonction cotangente (soit : $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$).

Pour tout $R \in]0, +\infty[$ on considère l'espace vectoriel $E_R = C^\infty(]-R, R[, \mathbb{R})$ des fonctions à valeurs réelles de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et le sous-espace H_R des fonctions développables en série entière sur $]-R, R[$. A toute fonction $f \in E_R$ on associe la série de Taylor en 0 : $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ (où l'on a par convention $x^0 = 1$ et $0! = 1$).

On considère alors le sous-espace E'_R des fonctions $f \in E_R$ dont la série de Taylor en 0 a un rayon de convergence, noté $R(f)$, non nul, et l'on appelle alors $T(f)$ la fonction de $H_{R(f)}$ définie par la somme de cette série.

On rappelle que $f \in H_R$ si et seulement si la restriction de $T(f)$ à $]-R, R[$ est égale à f.

I

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, est dans H_R pour tout R.

2. On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que la dérivée n-ème de f sur $\mathbb{R}^*$ est de la forme $P_n(\frac{1}{x})f(x)$ où $P_n(X)$ est un polynôme de degré $3n$. Déterminer $T(f)$ et en déduire que f appartient à $E'_R \setminus H_R$ pour tout R.

II

Soient g et h deux fonctions de E'_R. On pose $f = gh$.

On rappelle la formule suivante (formule de Leibniz) : $f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(k)} h^{(n-k)}$.

Soit $R_1 = \min(R(g), R(h))$. Montrer que f est aussi dans E'_R avec $R(f) \geq R_1$ et que $T(f)$ coïncide avec $T(g)T(h)$ sur $]-R_1, R_1[$.

III

1. Soient f et g deux fonctions de E'_R. On suppose que l'on a $g(0) = 1$ et que g ne s'annule pas sur $]-R, R[$. On pose $R_1 = \min(R(f), R(g))$ et $h = f/g$. Soit r un élément de $]0, R_1[$.

a) Montrer qu'il existe deux constantes A et B vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f^{(n)}(0)| \leq A\frac{n!}{r^n}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |g^{(n)}(0)| \leq B\frac{n!}{r^n}.$$

b) Etablir les inégalités suivantes :

$$|h(0)| \leq A\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |h^{(n)}(0)| \leq A\frac{n!(1+B)^n}{r^n}.$$

c) En déduire que h est dans E'_R avec $R(h) \geq \dfrac{r}{1+B}$.

d) On suppose que f et g sont dans H_R et l'on pose $R_2 = \min(R, R(h))$. Prouver alors que la restriction de h à $]-R_2, R_2[$ est dans H_{R_2}.

2. On considère la fonction $h(x) = \tan x$. Montrer que $h^{(n)}$ est de la forme $P_n(h)$ où $P_n(X)$ est un polynôme ayant tous ses coefficients positifs. En utilisant une formule de Taylor à l'ordre n pour h en 0, démontrer que $T(h)$ est définie sur $[0, \pi/2[$. Prouver enfin que $R(h) = \pi/2$.

3. Soit h la fonction définie par $h(x) = x\cot x$ pour $x \neq 0$ et $h(0) = 1$. Montrer que l'on a $R(h) \in]0, \pi]$.

IV

1. Soit α un élément de $]0, 1[$. On considère la fonction 2π-périodique f égale à $e^{i\alpha x}$ sur $[-\pi, \pi[$.

Calculer les coefficients c_n de la série de Fourier $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ associée à f. En donnant un énoncé précis d'un théorème du programme, et vérifiant soigneusement que f satisfait aux hypothèses de ce théorème, montrer que f est égale à la somme de cette série sur $]-\pi, \pi[$ et donner la valeur de cette somme en $x = \pi$.

2. Déduire de ce qui précède les formules suivantes :

$$\forall \alpha \in]0,1[,\ \cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

$$\forall x \in]0,\pi[,\ \cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

3. Etablir l'égalité suivante :

$$\forall x \in]0,\pi[,\ \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(x-n\pi)^2} + \frac{1}{(x+n\pi)^2}\right).$$

4. Montrer qu'il existe une constante C telle que l'on a sur $]0,\pi[$ l'égalité suivante :
$\ln \sin x = \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) + C$
et déterminer la valeur de C.

V

1. Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ on donne un réel positif a_{pq} de telle sorte que pour tout p la série $\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}$ soit convergente. On associe à cette série la fonction f_p définie sur $[0,\infty[$ par les égalités $\forall q,\ \forall x \in [q-1,q[,\ f_p(x) = a_{pq}$.

a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{\infty} f_p(x)\,dx$ existe et que sa valeur est égale à la somme $S_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}$.

b) On suppose de plus que la série $\sum_{p=1}^{\infty} S_p$ est convergente. On pose $U_q = \sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}$. En utilisant la série de fonctions $f = \sum_{p=1}^{\infty} f_p$, établir l'égalité $\sum_{p=1}^{\infty} S_p = \sum_{q=1}^{\infty} U_q$.

2. On considère à nouveau la fonction h définie en III-3. En utilisant les résultats de IV-2 et de la question précédente, montrer que l'on a :

$$T(h)(x) = 1 - 2\sum_{q=1}^{\infty} \zeta(2q)\frac{x^{2q}}{\pi^{2q}}$$

où $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$.

Retrouver par ce résultat les valeurs $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$, et montrer que l'on a $R(h) = \pi$.